§4.3 可测函数的收敛性

$f_n(x) \to f(x), \forall x \in E$：逐点收敛

Def. $\exists E_0$ 为零测集 s.t. $f_n(x) \to f(x), \forall x \in E \setminus E_0$，则 $f_n(x)$ 几乎处处收敛至 $f(x)$.（$f_n(x) \to f(x)$, a.e. 于 E）

$\forall \delta > 0, \exists E_0 \subseteq E$ s.t. $m(E_0) < \delta$，且 $f_n \rightrightarrows f$ 在 $E \setminus E_0$ 上，则 $f_n(x)$ 在 E 上近乎一致收敛至 $f(x)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E$，则 $f_n(x)$ 在 E 上一致收敛至 $f(x)$，记为 $f_n \rightrightarrows f$，在 E 上

于是有近乎一致收敛的等价定义：

$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists E_0 \subseteq E$ s.t. $m(E_0) < \delta, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in E \setminus E_0$.

例1 $f_n(x) = x^n, f(x) = 0$，$f_n(x)$ 近乎一致收敛至 $f(x)$.

$\forall \delta > 0$，取 $E_0 = [1 - \frac{\delta}{2}, 1]$ ~~s.t.~~，$m(E_0) = \frac{\delta}{2} < \delta$

$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon \Leftarrow (1 - \frac{\delta}{2})^n < \varepsilon \Leftarrow N = \left[\frac{\varepsilon}{\log(1 - \frac{\delta}{2})}\right] + 1$

Rem. N 的取值是与 δ 有关的.

几乎处处收敛也有如下等价定义：

$\exists E_0 \subseteq E, m(E_0) = 0$ s.t. $f_n \to f$ on $E \setminus E_0$

$\Leftrightarrow m(E[f_n \not\to f]) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in E[f_n \not\to f], f_n(x) \not\to f(x)$

$$E[f_n \not\to f] = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]$$

$$= \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} E[|f_n - f| \geqslant \tfrac{1}{k}]$$

又有 $m(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} E[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}]) = 0 \Leftrightarrow m(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} E[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}]) = 0, \forall k$

$\Leftrightarrow m(\cancel{\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty}} \overline{\lim_{n \to \infty}} E[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}]) = 0, \forall k$

例2 (1) e_k可测，E可测 $E\setminus(\bigcup_{k=1}^{+\infty}e_k)=\bigcap_{k=1}^{+\infty}(E\setminus e_k)$

$$E\setminus(\bigcup_{k=1}^{+\infty}e_k)=E\cap(\bigcup_{k=1}^{+\infty}e_k)^c=E\cap(\bigcap_{k=1}^{+\infty}e_k^c)=\bigcap_{k=1}^{+\infty}(E\setminus e_k)$$

(2) $E\setminus(\overline{\lim_{k\to+\infty}}e_k)=\underline{\lim_{k\to+\infty}}(E\setminus e_k)$

$$(\overline{\lim_{k\to+\infty}}e_k)^c=\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty}(\bigcup_{k=N}^{+\infty}e_k)\right)^c=\bigcup_{N=1}^{+\infty}(\bigcup_{k=N}^{+\infty}e_k)^c=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{k=N}^{+\infty}e_k^c$$

$$E\setminus(\overline{\lim_{k\to+\infty}}e_k)=E\cap(\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{k=N}^{+\infty}e_k^c)=\bigcup_{N=1}^{+\infty}(E\cap(\bigcap_{k=N}^{+\infty}e_k^c))$$

$$=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{k=N}^{+\infty}(E\setminus e_k)=\underline{\lim_{k\to+\infty}}(E\setminus e_k)$$

(3) $m(E_k)<\frac{1}{2^k},\forall k$, $m(\bigcup_{k=N}^{+\infty}E_k)\leqslant\frac{1}{2^{N-1}}$

记$F_N=\bigcup_{k=N}^{+\infty}E_k$，则 $m(\bigcap_{N=1}^{+\infty}F_N)\leqslant m(F_n)\to 0$.

事实上我们有：$\sum_{k=1}^{+\infty}m(E_k)<+\infty$，则$m(\overline{\lim_{k\to+\infty}}E_k)=0$

下面讨论三种收敛的关系：

一致收敛 $\Longrightarrow$ 近乎一致收敛(a.u.) $\underset{B}{\overset{A}{\Longleftrightarrow}}$ 几乎处处收敛(a.e.)

Thm. (A)

若f_n,f可测，$f_n\xrightarrow{a.u.}f$，则$f_n\xrightarrow{a.e.}f$

Pf. $f_n\xrightarrow{a.u.}f\Longleftrightarrow\forall k>0$, $\exists\{e_k\}$可测 s.t. $m(e_k)<\frac{1}{k}$, $f_n\rightrightarrows f$ 在$E\setminus e_k$上. 往证 $m(E[f_n\not\to f])=0\Longleftrightarrow m(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty}E[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}])=0$.

令$E_0=\overline{\lim_{k\to+\infty}}e_k$

Claim. $\forall x\in E\setminus E_0\Rightarrow f_n(x)\to f(x)\Rightarrow E[f_n\not\to f]\subseteq E_0$

事实上 $E\setminus E_0=E\setminus\overline{\lim_{k\to+\infty}}e_k=\underline{\lim_{k\to+\infty}}(E\setminus e_k)=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{n=N}^{+\infty}(E\setminus e_k)$

$\forall x\in E\setminus E_0$, $\exists N$ s.t. $x\in\bigcap_{k=N}^{+\infty}(E\setminus e_k)$

$\exists N$, $\forall k\geqslant N$ 有 $x\in E\setminus e_k$，由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$\forall x\in E\setminus e_k$

$\Rightarrow f_n(x)\to f(x)$, $x\in E\setminus e_k$

Thm. (B) Egoroff

若 $m(E)<+\infty$，$f_n \xrightarrow{a.e.} f$，则 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

Pf. $f_n \xrightarrow{a.e.} f$，$m(E[f_n \nrightarrow f])=0 \Rightarrow m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty} E[|f_n-f|\geq \frac{1}{k}]\right)=0.$

记 $e_k=E[|f_n-f|\geq\frac{1}{k}]$，~~$\forall\delta>0$~~，$m(\bigcap_{N=1}^{+\infty}F_N)=m(\lim_{N\to+\infty}F_N)$

由 $m(E)<+\infty$，$m(\lim_{N\to+\infty}F_N)=\lim_{N\to+\infty}m(F_N)$

$\forall\delta>0$，$\exists N_\delta$ s.t. $\forall n>N_\delta$ $m(F_{N_\delta})<\frac{\delta}{2^{N_\delta}}$，$m(\bigcup_{N\geq N_\delta}F_N)<\sum_{N=1}^{+\infty}\frac{\delta}{2^{N_\delta}}=\delta$

~~再考虑近乎一致收敛~~：

$\forall\delta>0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ s.t. $n\geq N$，$m(E[|f_n-f|\geq\varepsilon])<\delta.$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\lim_{n\to\infty}m(E[|f_n-f|\geq\varepsilon])=0.$

Def. f_n, f 可测，a.e.有限，若 $\forall\varepsilon>0$，有 $m(E[|f_n-f|\geq\varepsilon])\to 0$，

则称 f_n 依测度收敛于 f，记为 $f_n\Rightarrow f$.

Thm. 若 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，$m(E)<+\infty$，则 $f_n\Rightarrow f$.（Lebesgue Thm.）

若 $f_n \underset{m(E)<+\infty}{\Rightarrow} f$，则 $\exists\{f_{n_k}\}$ s.t. $f_{n_k}\xrightarrow{a.e.}f$（Riesz Thm.）

Pf. 令 $e_k=E[|f_{N_k}-f|\geq\frac{1}{k}]$，则 $m(e_k)<\frac{1}{2^k}$，于是 $\sum_{k=1}^{+\infty}m(e_k)=1<+\infty$，

有 $m(\overline{\lim_{k\to+\infty}}e_k)=0$，记 $E_0=\overline{\lim_{k\to+\infty}}e_k$

当 $x\in E\setminus E_0$ 时，$f_n(x)\to f(x)$

$E\setminus E_0=E\setminus(\overline{\lim_{k\to+\infty}}e_k)=\underline{\lim_{k\to+\infty}}(E\setminus e_k)=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{k=N}^{+\infty}(E\setminus e_k)$

于是 $\forall x\in E\setminus E_0$，$\exists N_0$，$\forall k\geq N_0$，$x\notin e_k$，$x\in E$，$|f_{N_k}(x)-f(x)|<\frac{1}{k}.$

即：$\forall k$，$\exists N_0$，$\forall k\geq N_0$ 有 $|f_{N_k}(x)-f(x)|<\frac{1}{k}$，$\lim_{k\to+\infty}f_{N_k}(x)=f(x).$

令 $\forall x\in E\setminus E_0$

故 $f_{n_k}\xrightarrow{a.e.}f$ on E

Rem. 几乎处处收敛 $\not\Rightarrow$ 依测度收敛

例如 $\chi_{(0,n]} \xrightarrow{a.e.} \chi_{(0,+\infty)}$，但 $\chi_{(0,n]} \not\Rightarrow \chi_{(0,+\infty)}$

依测度收敛 $\not\Rightarrow$ 几乎处处收敛

例如 $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \chi_{(\frac{1}{2},1]}, \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, \chi_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, \chi_{(\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}, \chi_{(\frac{3}{4},1]}, \cdots$

构成一列函数 $\{f_n\}$，$f_n(x)$ 处处不收敛

但同时又有：$\lim\limits_{k\to+\infty} m(E[f_n(x)\neq 0]) = \lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{2^k} = 0$，依测度收敛

下面讨论依测度收敛的性质：

1. 若 $f_n \Rightarrow f$，$f_n \Rightarrow g$，则 $f=g$, a.e.$[E]$.（唯一性）

Pf. $f_n \Rightarrow f$，$\exists$ 子列 $\{f_{n_k}\}$ s.t. $f_{n_k} \to f$ a.e.$[E]$.

$f_{n_k} \Rightarrow g$，$\exists$ 子列 $\{f_{n_{k_j}}\}$ s.t. $f_{n_{k_j}} \to g$ a.e.$[E]$

由 $f_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.e.} g$，$f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$，$f=g$ a.e.$[E]$.

2. 若 $f_n \Rightarrow f$，$g_n \Rightarrow g$，$f_n \geq g_n$ a.e.$[E]$，$\forall n$，则 $f \geq g$ a.e.$[E]$.（保号性）

Pf. $f_n \Rightarrow f$，$\exists$ 子列 $\{f_{n_k}\}$ s.t. $f_{n_k} \to f$ a.e.$[E]$.

$g_n \Rightarrow g$，$g_{n_k} \Rightarrow g$，$\exists$ 子列 $\{g_{n_{k_j}}\}$ s.t. $g_{n_{k_j}} \to g$ a.e.$[E]$.

由 $f_n \geq g_n$，$f_{n_{k_j}}(x) \geq g_{n_{k_j}}(x)$，$\forall x \in E\setminus E_0$，其中 $m(E_0)=0$.

由极限保号性，$\lim\limits_{j\to+\infty} f_{n_{k_j}}(x) \geq \lim\limits_{j\to+\infty} g_{n_{k_j}}(x)$ a.e.$[E]$.

即 $f \geq g$ a.e.$[E]$.

3. 若 $f_n \Rightarrow f$，f_n 可测，则 f 也可测

Pf. $f_n \Rightarrow f$，$\exists$ 子列 $\{f_{n_k}\}$ s.t. $f_{n_k} \to f$ a.e.$[E]$，$\{f_{n_k}\}$ 可测

由 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} f_{n_k}$，$\underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} f_{n_k}$ 可测知 f 可测.

4. (1) 若 $f_n \Rightarrow f$，$a\in\mathbb{R}$，则 $a\cdot f_n \Rightarrow a\cdot f$.

Pf. $\forall \varepsilon>0$，往证 $m(E[|af_n - af| \geq \varepsilon]) \to 0$，$n\to+\infty$

由 $f_n \Rightarrow f$，$\forall \frac{\varepsilon}{|a|}>0$，有 $m(E[|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}]) \to 0$，$n\to+\infty$

若 $a=0$，显然 $a\cdot f_n = a\cdot f = 0$，$0 \Rightarrow 0$.

(2) 若 $f_n \Rightarrow f$, $g_n \Rightarrow g$, 则 $f_n+g_n \Rightarrow f+g$.

Pf. $\forall \varepsilon>0$, 往证 $m(E[|f_n+g_n-(f+g)|\geq\varepsilon]) \to 0, n\to+\infty$

由 $f_n\Rightarrow f$, $g_n\Rightarrow g$, $m(E[|f_n-f|\geq\frac{\varepsilon}{4}])\to 0$, $m(E[|g_n-g|\geq\frac{\varepsilon}{4}])\to 0$.

由 $E[|(f_n+g_n)-(f+g)|\geq\varepsilon] \subseteq E[|f_n-f|\geq\frac{\varepsilon}{4}] \cup E[|g_n-g|\geq\frac{\varepsilon}{4}]$

于是 $m(E[|(f_n+g_n)-(f+g)|\geq\varepsilon]) \leq m(E[|f_n-f|\geq\frac{\varepsilon}{4}])+m(E[|g_n-g|\geq\frac{\varepsilon}{4}])$

$\leq 0.$

5. (1) 若 $f_n \Rightarrow 0$ $g_n \Rightarrow 0$ 则 $f_n\cdot g_n \Rightarrow 0$.

Pf. $\forall\varepsilon>0$, 往证 $m(E[|f_n\cdot g_n|\geq\varepsilon])\to 0, n\to+\infty$

令 $E_n = E[|g_n|>1]$, $E_n^c = E[|g_n|\leq 1]$

$E[|f_n\cdot g_n|\geq\varepsilon] \subseteq E_n[|f_n\cdot g_n|\geq\varepsilon] \cup E_n^c[|f_n\cdot g_n|\geq\varepsilon] \subseteq E \cup E[|f_n|\geq\varepsilon]$

对于 $\varepsilon_0=1$, 由 $g_n\Rightarrow 0$, $m(E[|g_n|\geq 1])\to 0, n\to+\infty$, 即:

$\forall\delta>0, \exists N_1$ s.t. $n\geq N_1$ 时 $m(E[|g_n|\geq 1])<\frac{\delta}{2}$

由 $f_n\Rightarrow 0$, $\exists N_2$ s.t. $n\geq N_2$ 时 $m(E[|f_n|\geq\varepsilon])<\frac{\delta}{2}$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, $\forall n\geq N$ 有 $m(E[|f_n|\geq\varepsilon])+m(E[|g_n|\geq 1])<\delta$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} m(E[|f_n\cdot g_n|\geq\varepsilon])=0$.

(2) 若 $f_n\Rightarrow 0$, g 有界可测, 则 $f_n\cdot g\Rightarrow 0$.

Pf. $\forall\varepsilon>0$, 往证 $m(E[|f_n\cdot g|\geq\varepsilon])\to 0, n\to+\infty$

~~由~~ $f_n\Rightarrow f$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E[|f_n-f|\geq\frac{\varepsilon}{M}])=0$.

考虑 $|g|\leq M$, 有 $|\frac{1}{g}|\leq\frac{1}{M}$, 即 $m(E[|f_n\cdot g|\geq\varepsilon])\to 0, n\to+\infty$.

Cor. 若 $f_n\Rightarrow f$, $g_n=g$ 有界可测, 则 $f_n\cdot g\Rightarrow f\cdot g$.

Rem. 有界性不可去, 例如 $g=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上可测, $f_n=\chi_{(0,n)}\frac{1}{x}$ 则:

$f_n\cdot g=\chi_{(0,n)} \not\Rightarrow \chi_{(0,+\infty)}$

$f\cdot g = 1 \Rightarrow \chi_{(0,+\infty)}$

$\forall\varepsilon>0, E[|f_n-f|>\varepsilon]$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, $\forall n\geq N$, 有 $E[|f_n-f|>\varepsilon]=0, n\to+\infty$